Institut für
Mathematische Statistik

Übungen

Abgabetermin: Freitag 2.7. 10Uhr, Briefkästen 41, 42, 43 und 46
THEMEN: regulär bedingte Verteilungen

Aufgabe 40 (5 Punkte)
Es sei $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein Borel-Raum. Zeigen Sie die in der Vorlesung ausgelassenen Schritte in den Beweisen von:

a) Für jedes $h : (\Omega', \mathfrak{A}') \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$, für das $h(X)$ quasi-integrierbar ist, gilt

$$E(h(X)|Y=y) = \int h(x) P^{X|Y=y}(dx) \ P^Y\text{-f.s.}$$

b) Für jedes $h : (\Omega' \times \Omega'', \mathfrak{A}' \otimes \mathfrak{A}'') \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$, für das $h(X,Y)$ quasi-integrierbar ist, gilt

$$E(h(X,Y)|Y=y) = \int h(x,y) P^{X|Y=y}(dx) \ P^Y\text{-f.s.}$$

Aufgabe 41 (5 Punkte)
Es sei $(X,Y) : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (\Omega' \times \Omega'', \mathfrak{A}' \otimes \mathfrak{A}'')$ ein Zufallsvektor und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein Borel-Raum. Weiter sei $h : (\Omega' \times \Omega'', \mathfrak{A}' \otimes \mathfrak{A}'') \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}})$ eine quasi-integrierbare Funktion und $\mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$, bzgl. derer Y messbar ist. Zeigen Sie, dass für P-fast alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$E(h(X,Y)|\mathcal{F})(\omega) = \int h(x, Y(\omega)) P^{X|\mathcal{F}}(\omega, dx).$$

Aufgabe 42 (5 Punkte)
Es seien X und Y stochastisch unabhängige $Exp(\lambda)$-verteilte Zufallsgrößen, $\lambda > 0$.

a) Zeigen Sie, dass

$$f(x,z) := \lambda^2 e^{-\lambda z} 1_{(0,\infty)\times(x,\infty)}(x,z)$$

eine $\lambda\!\!\lambda^2$-Dichte von $P^{(X,X+Y)}$ ist.

b) Bestimmen Sie eine Version der bedingten Verteilung $P^{X|X+Y}$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen: $Exp(\lambda) * Exp(\lambda) = \Gamma(2,\lambda)$. Dabei hat die $\Gamma(a,b)$-Verteilung die folgende $\lambda\!\!\lambda$-Dichte:

$$g(x) = \frac{b^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-bx} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Bitte wenden!

Aufgabe 43 (5 Punkte)

a) Bestimmen Sie zu dem Vektor (X, Y) aus Aufgabe 38 b) eine Version der bedingten Verteilung $P^{X|Y=y}$ und damit erneut eine Version von $E(X|Y = y)$ sowie $E(X^2|Y = y)$.

b) Es seien X_1, X_2 unabhängige und identisch $\mathcal{R}[0, 1]$-verteilte Zufallsgrößen. Definiere $Y := \min\{X_1, X_2\}$ sowie $Z := \max\{X_1, X_2\}$. Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von Y und Z und mit dieser eine Version der bedingten Verteilung von Y gegeben $Z = z$.
Hinweis: Benutzen Sie ohne Beweis, dass für einen Zufallsvektor (X, Y) mit $\lambda\!\!\lambda^2$-Dichte f und gemeinsamer Verteilungsfunktion F gilt

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}F(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}F(x, y).$$